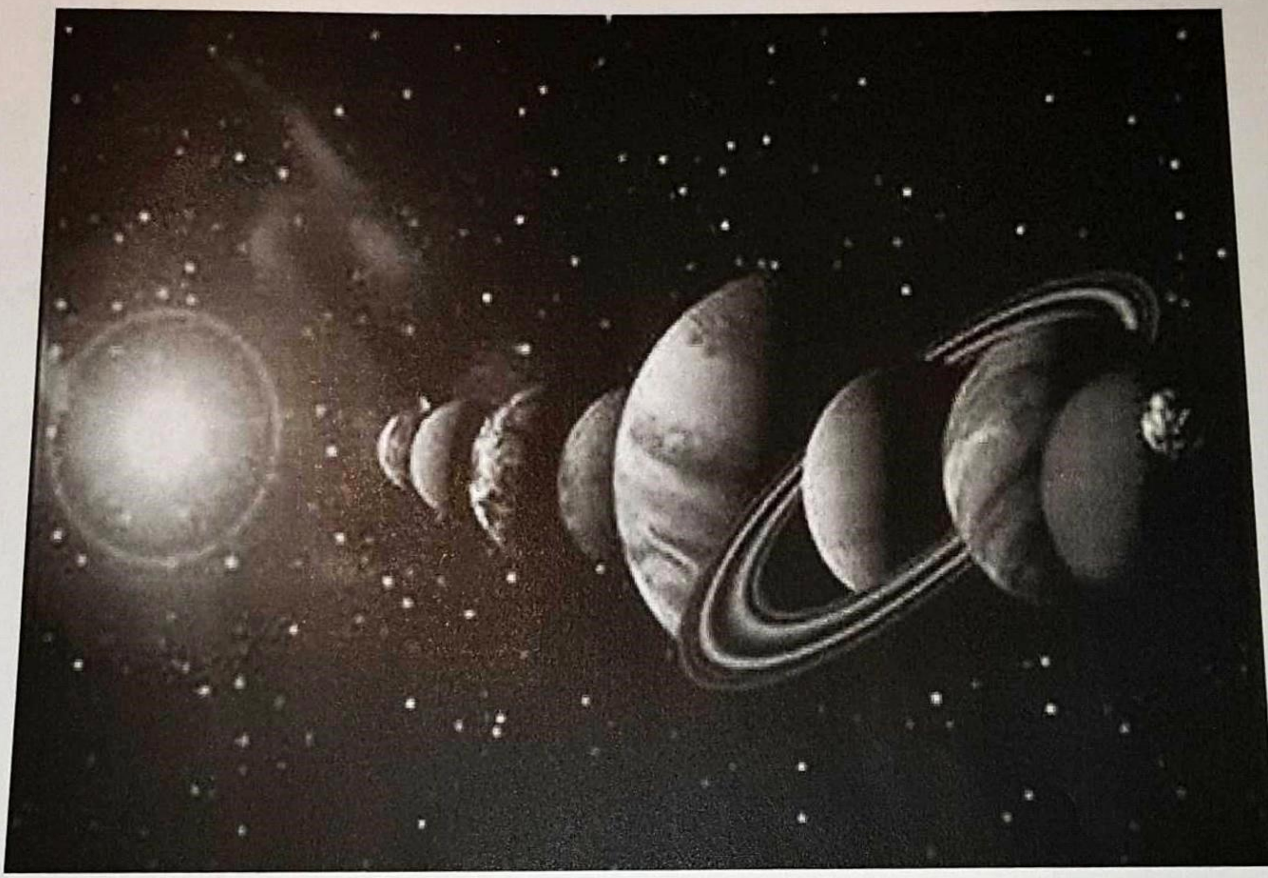
Unité 5



Identités Trigonométriques

Algèbre -- Révision

Pour pouvoir bien réussir ce cours, et surtout cette unité, une connaissance fondamentale d'algèbre est nécessaire. Si vous n'êtes pas en mesure de faire opérations algébriques suivantes de façon vite et efficace, il vous faudra fair beaucoup de révision.

1. Déplacer les termes d'un côté de l'équation à l'autre.
2. Identifier et rassembler les termes semblables
3. Multiplier des puissances
4. Factoriser
    a. Mettre en évidence un terme semblable
    b. différences de carrés
    c. polynômes de la forme $y = x^2 + bx + c$
    d. polynômes de la forme $y = ax^2 + bx + c$
5. Simplifier
6. Substituer
7. Vérifier

6.1 **Identités trigonométriques**

Parfois, on veut prouver que deux côtés d'une identité sont égaux. Vous pouvez utiliser les indices suivants pour les prouver :

Nos outils. Il n'y a pas un ordre spécifique

1. Travaillez avec seulement un côté de l'identité.
2. Choisissez le côté le plus complexe.
3. Essayez de le réduire à $\sin\theta$ et/ou $\cos\theta$. (Enleve tan)
4. Factorisez si possible.
5. Trouvez un dénominateur commun pour pouvoir additionner ou soustraire des fractions.
6. Multipliez par le conjugué (le conjugué de x-1 est x+1)
7. Ne lâchez pas! Continuez à réessayer différentes étapes.

- N'oubliez pas!

IDENTITÉS QUOTIENT

IDENTITÉS INVERSES.

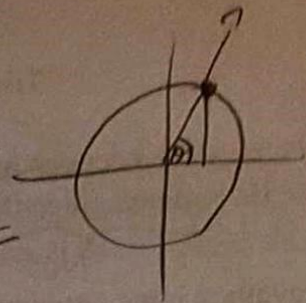
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$P(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$

ou

(x, y)



Identités de Pythagore

L'équation d'un cercle unitaire $x^2 + y^2 = 1$ ⇒

Alors :

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

On peut rearranger avant de remplacer dans nos equations

2. $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$

$1 = \csc^2\theta - \cot^2\theta$

3. $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$1 = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

C'est quoi la différence entre une identité trigonométrique et une équation trigonométrique.?

- On peut manipuler les identités de Pythagore pour isoler $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$, $\cot^2\theta$ et $\tan^2\theta$ ↳ On considère l'expression sur 1 coté de l'équation et le change avec des expressions équivalents.

Prouver les identités suivantes :

Ex : $\sin\theta\sec\theta = \tan\theta$

Membre Gauche		Membre Droite
$\sin\theta\sec\theta$		
$\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)$	inverse	
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	quotient	
$\tan\theta = MD$		

Ex : $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$

Membre Gauche		Membre Droite
$\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right)$	Deno commun	
$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$	Pythagore	
$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$	fractions	
$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)$	INVERSE	
$\csc\theta\sec\theta = MD$		

3 ex. $\frac{\sin x + \tan x}{\cos x + 1} = \tan x$

$\frac{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\cos x}{\cos x}\right)}{\cos x + 1}$ Deno comm.

$\frac{\frac{\sin x\cos x + \sin x}{\cos x}}{\cos x + 1}$ ADD

$\frac{\sin x(\cos x+1)}{\cos x} \times \frac{1}{(\cos x+1)}$ factorise et met horizo

$\frac{(\sin x)(\cos x+1)}{(\cos x)(\cos x+1)}$ Mult & elimine.

$\frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x = MD$

2

Ex : $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 2\sin^2\theta - 1$

Membre Gauche	Membre Droite
$(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$ * Diff de carré	
$(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\quad 1 \quad)$ Pythagore.	
$(\sin^2\theta - (1 - \sin^2\theta))$ replace $\cos^2\theta$ avec $1 - \sin^2\theta$ NB Parenthèses!	
$\sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta$ Termes semblables.	
$2\sin^2\theta - 1 = MD$ ✓	

1

Ex $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \dfrac{1}{\sec^2 x}$

Membre Gauche	Membre Droite
$1 + \sin x - \sin x - \sin^2 x$ développe.	
$1 - \sin^2 x$ Termes semblables	
$\cos^2 x$ pythagore.	
$\dfrac{1}{\sec^2 x} = MD$ ✓ INVERSE	

6.1 # 1a) valeurs non permises – Utilise MG ou MD pour les trouver.

A) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$

VNP quand $\cos x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x \neq \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

MAIS! Ceci est juste un valeur chaque π donc on peut dire

$$\boxed{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}}$$

c) $\dfrac{\tan x}{1 - \cos x} = \dfrac{1}{(1 - \cos x)} \cdot \dfrac{\sin x}{(\cos x)}$

MG

$1 - \cos x = 0$

$\cos x = 1$

$x \neq 0 + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

ou mieux

$$\boxed{x \neq 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}}$$

$\cos x = 0$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$

$$\boxed{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k}$$ (voir A

Ex : $2\sec^2 x = \frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x}$

Membre Gauche	Membre Droite
	$\frac{1}{(1-\sin x)}\frac{(1+\sin x)}{(1+\sin x)} + \frac{1}{(1+\sin x)}\frac{(1-\sin x)}{(1-\sin x)}$ Conjugé
	$\frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} + \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$
	$\frac{1+\sin x+1-\sin x}{1-\sin^2 x}$
	$\frac{2}{1-\sin^2 x}$

$\frac{2}{\cos^2 x} \to 2\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \to \boxed{2\sec^2 x = MG}$

Exprime chacune des expressions suivantes uniquement en termes de sinθ :

1. $\cot^2\theta$ $\to \frac{1}{\tan\theta} \to \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ NB

$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\boxed{\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}}$

2. $\sec^2\theta$

$\frac{1}{\cos^2\theta}$

$\boxed{\frac{1}{1-\sin^2\theta}}$

Ex. Pour chaque identité :

a) Vérifie l'identité que $\theta = \frac{\pi}{4}$

b) ~~Prouve l'identité~~
TROUVE VNP

NB Le fait que 1 valeur marche ne veut pas dire que toutes valeurs vont marcher !!

NB On peut utiliser le MG ou MD pour trouver les VNP

AUCUN VNP en i)
Impossible de produire un deno de 0!

i) $\sin\theta\sec\theta\cot\theta = 1$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

$\frac{\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot 2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}}$

NB $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$

$\frac{4\cdot 2}{4\cdot 2}$

$\frac{8}{8} \to 1 = MD$ ✓

ii) $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta} = 1 + \cot\theta$

$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1 + \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)$

$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\frac{2\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = 1 + 1$

$\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$

$2 = 2$ ✓

VNP Quand $\sin\theta = 0$
(Meme sur MG ou MD!)
Toujours

$\sin\theta = 0$?
$\theta \neq 0\pi, 2\pi, \ldots$

$\boxed{\theta \neq \pi k \quad k \in \mathbb{Z}}$

Ex. Pour chaque identité :

a) Détermine les valeurs non-permis de θ.

b) Prouve l'identité

i) $\cos^2\theta = \frac{\cot\theta \sin\theta}{\sec\theta}$

MG	MD
	$\cot\theta \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$ INVERSE
	$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$
	$\cos^2\theta = MG$ ✓

VNP ? Impossible de produire un dénominateur de 0. MG n'a aucun déno. AUCUN VNP

Réorganise MD, aucun déno.

Mieux d'utiliser le coté le plus simple.

ii) $\frac{\sin\theta + \tan\theta}{1+\cos\theta} = \sin\theta \sec\theta$

déno commun.

$\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \div (1+\cos\theta)$

$\frac{\cos\theta\sin\theta + \sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{(1+\cos\theta)}$

Factorise

$\frac{\sin\theta\cancel{(\cos\theta+1)}}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\cancel{(1+\cos\theta)}}$

VNP $\cos\theta = 0$

$\boxed{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}}$

NB ce n'est pas $1+\cos\theta$. Il faut rearranger le tan, MD plus simple.

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$(\sin\theta)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)$

$(\sin\theta)(\sec\theta) = MD$

Révision de 4.4 fonctions circulaires et leçon 4 identités.

Ex. Utilise l'algèbre pour résoudre chaque équation dans l'intervalle $0 \leq \theta < 2\pi$. Donne les racines quand nécessaire. → Quand $y = 0$, $x =$?

→ NB 2π pas inclus !

i) 3cosx + 1 = 2 secx

$\cos x \cdot \quad 3\cos x + 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right) \cdot \cos x$

Trinôme !

$\cos x \cdot (3\cos x + 1) = 2$

$\rightarrow 3\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

P: $+3 \times -2 = -6$

S: $3 + -2 = 1$

$3\cos^2 x + 3\cos x - 2\cos x - 2 = 0$

$3\cos x(\cos x + 1) - 2(\cos x + 1) = 0$

$(\cos x + 1)(3\cos x - 2) = 0$

$\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -1$

$x = \pi$

$3\cos x - 2 = 0$

$3\cos x = 2$

$\cos x = \frac{2}{3}$ Pas sur cercle, Calculatrice

$x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

Q1 $x = 0,8411$

Q4 $x = 2\pi - 0,8411$

$x = 5,442$

$\boxed{x = 0,8411 / \pi / 5,442}$ Zéros sont !

DÉFI ii) sinx + $\sqrt{3}$cosx = 0

Factorise sinx

$(\sin x)\left(1 + \frac{\sqrt{3}\cos x}{\sin x}\right) = 0$

OU

$(\sin x)(1 + \sqrt{3}\cot x) = 0$

$\sin x = 0$

$\boxed{x = 0, \pi, \cancel{2\pi} \text{ PAS INCLUS}}$

Zéros

$\boxed{x = 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}}$

$1 + \sqrt{3}\cot x = 0$

$\sqrt{3} \cdot \cot x = -1$

$\cot x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

DEFN

$\cot x = \frac{x}{y}$

$\tan x = \frac{y}{x}$

OU

$\tan x = -\sqrt{3}$ → Penser au cercle. Comment arriver à $-\sqrt{3}$

$\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = -\sqrt{3}$

$\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

Besoin de $-\frac{\sqrt{3}}{2} / \frac{1}{2}$ .. $\frac{2\pi}{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} \rightarrow -\sqrt{3} = -\sqrt{3}$ ✓